

PyKirigami: 一个用于剪纸超材料的交互式 Python 模拟器

Qinghai Jiang^a, Gary P. T. Choi^{a,*}

^a*Department of Mathematics, The Chinese University of Hong Kong*

Abstract

近年来, 剪纸的概念已被用于创建各种科学和技术应用的可展开结构。虽然剪纸超材料的设计已广泛研究, 但对其展开和形状变换过程的模拟则较少探索。在此工作中, 我们开发了 PyKirigami, 一个基于 Python 的开源计算工具, 用于剪纸超材料的部署模拟。特别是, 我们的工具能够模拟具有不同几何、拓扑和物理特性的大量二三维剪纸超材料的部署。总的来说, 我们的工作为形状变换机械超材料的建模和设计开辟了新途径。

Keywords: 剪纸艺术, 展开, 模拟, 机械超材料

1. 介绍

剪纸, 这种传统的剪纸艺术, 最近在科学和工程领域引起了极大的兴趣 [1, 2, 3, 4, 5]。特别是, 通过在一个材料层上引入切割并使用适当的关节连接不同的组件, 已经开发出了一系列具有不同形状变形效果的可展开结构。由于其极高的柔性和变形单性, 基于剪纸的超材料已被广泛应用于柔性电子学 [6], 储能 [7] 和机器人技术 [8]。

大多数关于剪纸设计的前期工作都集中在基于简单切割模式的平面可展开结构及其平面变形上, 如旋转三角形 [9]、四边形 [10, 11] 以及其他周

*Corresponding author.

Email addresses: qhjiang@math.cuhk.edu.hk (Qinghai Jiang),
ptchoi@cuhk.edu.hk (Gary P. T. Choi)

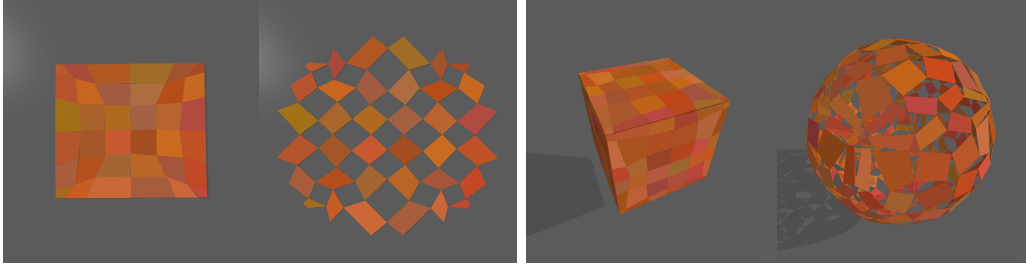


图 1: 通过我们的 PyKirigami 模拟器获得的 kirigami 结构展开。(左) 二维 kirigami 结构的展开。(右) 三维 kirigami 结构的展开。

期性平铺 [12, 13, 14] 和非周期性平铺 [15]。近年来，一些研究也探讨了设计更通用的剪纸图案以实现不同的物理和几何效果 [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23]。还有越来越多的兴趣在于设计能够不仅实现二维 (2D) 而且实现三维 (3D) 形状变换的剪纸，具有不同的所需 2D 到 3D 或 3D 到 3D 形态变化效果 [24, 25, 26, 27, 28]。

尽管对 kirigami 结构的设计进行了广泛的研究，但对其形状变形过程的模拟和分析的计算方法却探索得较少。大多数之前的 kirigami 设计工作直接使用了有限元分析 (FEA) 软件如 ABAQUS (例如 [29, 30, 23]) 或 COMSOL (例如 [31, 32, 33])，来模拟在特定边界载荷条件下的 kirigami 结构的展开过程。其他一些工作则考虑了涉及线性弹簧的其他机械模型，用于在 MATLAB[16, 18] 中模拟 2D 到 2D 和 2D 到 3D 的部署。最近，Liu 等人 [15] 基于二维刚体物理库 Pymunk 开发了一个从 2D 到 2D 的 kirigami 展开仿真器，重点在于可刚性展开的平面 kirigami 图案。然而，在许多实际应用中，需要模拟在二维和三维空间内更为一般的 kirigami 部署过程。此外，还需要考虑在整个部署过程中 kirigami 结构与其环境和其他外部物体之间的相互作用。另外，具有轻量级、高效且自由可用的部署仿真器，并具备交互控制功能以实现 kirigami 结构的实时操作和分析是非常理想的。

在这项工作中，我们开发了 PyKirigami，一个基于 Python 的开源模拟器，用于模拟一般 kirigami 超材料的 2D 和 3D 展开 (参见图 1 中的示例)。具体而言，我们的模拟器利用了 PyBullet 物理引擎，并能够模拟 2D 到 2D、2D 到 3D 以及 3D 到 3D 的 kirigami 展开。它还支持环境效应和稳

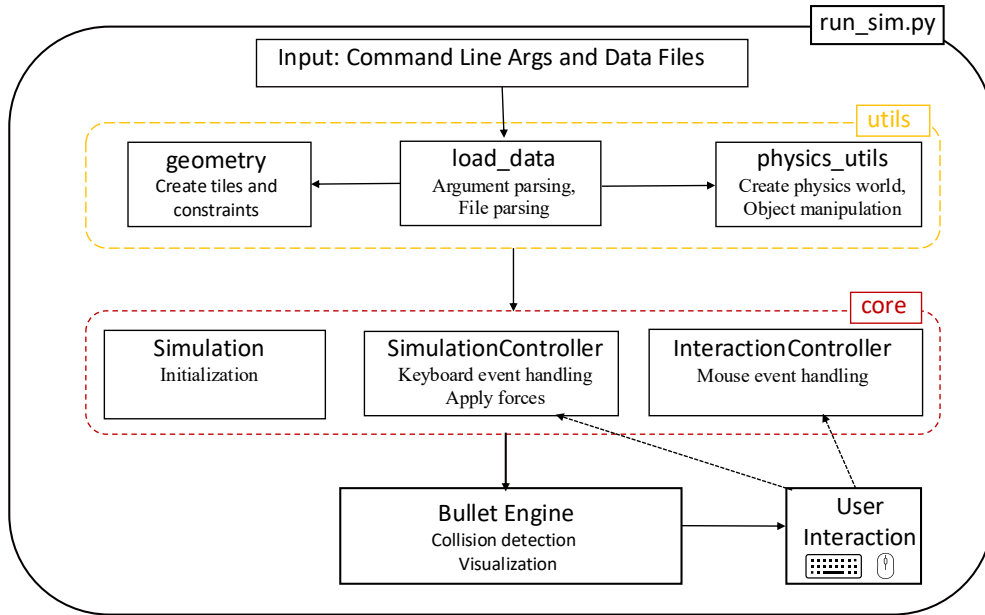


图 2: 我们的 PyKirigami 模拟器的计算框架。

定机制的配置，以模拟不同的场景。此外，在整个展开过程中允许动态控制边界条件，从而在实现不同预期展开效果方面提供了极大的灵活性。使用 PyKirigami，可以轻松地模拟部署并分析各种 kirigami 结构的特性。

2. 方法

2.1. 概述

我们的 PyKirigami 模拟器的目标是模拟 kirigami 超材料的展开过程，通常是从一个紧凑的初始状态到二维或三维的展开配置。图 2 显示了 PyKirigami 模拟器的框架。

更具体地说，PyKirigami 的功能可以归类如下：

- **核心仿真逻辑**：该组件负责主要的模拟循环，处理物理计算，并管理模拟对象的状态。它包括用于管理模拟状态、处理用户交互（如暂停和重置）以及对对象施加力的类。

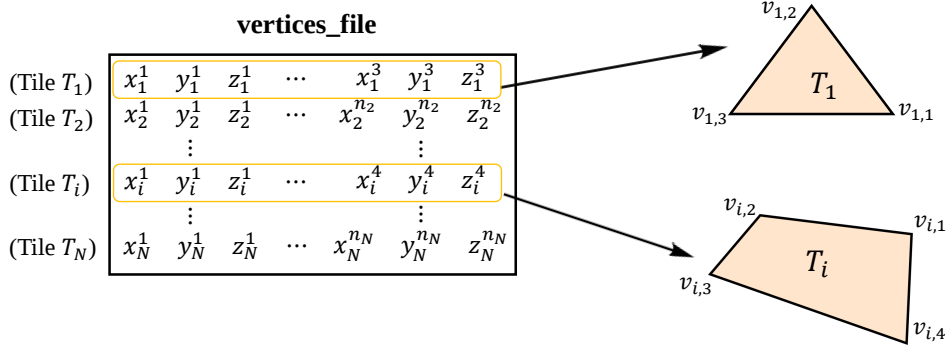


图 3: 输入文件中通过--顶点文件编码的顶点坐标的示例。这里需要注意的是，不同的瓦片可能包含不同数量的顶点。

- **效用函数**：该组包含用于解析命令行参数、加载输入数据（如顶点坐标和约束条件）以及执行几何运算（如从二维定义创建三维模型）的模块。
- **主可执行文件**：主可执行脚本初始化仿真环境，编排仿真循环，并集成各个模块。

PyKirigami 的核心概念在以下各节中进行了进一步详细介绍。

2.2. 几何表示法：从二维多边形到三维瓦片

在我们的工作中，我们考虑由直线切割形成的多边形瓷砖，并注意到曲面切割可以通过使用多个直线切割进行离散化和近似处理，在实际应用中。同样，在之前的剪纸设计和模拟工作中 [16, 15]，为了简化问题，通常将剪纸瓷砖视为零厚度的二维物体。相比之下，我们在这里将剪纸瓷砖视为三维刚体（“砖块”），在平面内和平面外的三维部署模拟中，从而能够实现更真实的模拟过程。

更数学化地说，令 $\{\mathcal{T}_i\}_{i=1}^N$ 表示折纸结构中所有折纸瓷砖的集合，其中每个瓷砖 $\mathcal{T}_i$ 最初由一组顶点 $\{v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,n_i}\}$ 定义，其中 $v_{i,j} \in \mathbb{R}^3$ 和 n_i 是瓷砖 $\{\mathcal{T}_i\}$ 的顶点数（参见图 3）。

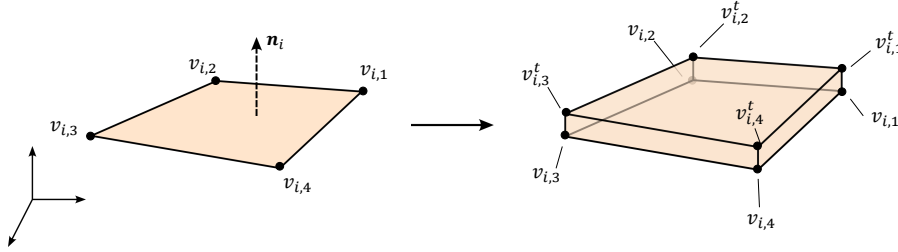


图 4: 三维剪纸瓷砖的几何构造示例。(左) 原始多边形瓷砖 $\mathcal{T}_i$, 虚线箭头表示其法向量。(右) 通过沿其法向量拉伸 $\mathcal{T}_i$ 构建的 3D 瓷砖几何结构。此处, 瓷砖的厚度可以由用户指定。

为了创建一个更符合物理现实的模型, 每个平面瓷砖被拉伸成一个具有用户定义厚度的三维刚体或“砖块”, t 。该过程在算法 1 中详细说明, 并在图 4 中进行了示例展示。

Algorithm 1: 3D 瓦片生成管道

- 1: **输入:** 顶点坐标文件, 砖块厚度参数 t
 - 2: **输出:** PyBullet 身体 ID, 每个瓷砖的局部顶点坐标
 - 3: 从输入文件加载顶点数据
 - 4: **for** each tile $\mathcal{T}_i$ with vertices $\{v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,n_i}\}$ **do**
 - 5: 计算几何中心: $\mathbf{c}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} v_{i,j}$ 。
 - 6: 计算法向量: $\mathbf{n}_i = \frac{(v_{i,2}-v_{i,1}) \times (v_{i,3}-v_{i,1})}{\|(v_{i,2}-v_{i,1}) \times (v_{i,3}-v_{i,1})\|}$ 。
 - 7: 生成顶点: $v_{i,j}^t = v_{i,j} + t \cdot \mathbf{n}_i$ 为 $j = 1, \dots, n_i$ 。
 - 8: 存储局部坐标: $v_{i,j} - \mathbf{c}_i$ 和 $v_{i,j}^t - \mathbf{c}_i$ 。
 - 9: 创建由 $2n_i$ 个顶点组成的视觉网格和碰撞形状。
 - 10: 在物理引擎中实例化刚体, 返回身体 ID。
 - 11: **end for**
-

挤出过程在瓷砖的“底部”面 (原始顶点) 和“顶部”面 (挤出顶点) 之间建立了一个关键的区别。这种区别不仅仅是几何上的, 还具有功能性: 它允许精确指定 3D 空间中的连接点, 从而使建模复杂的接合行为 (如铰链和刚性连接) 成为可能, 这些在纯 2D 表示中是不可能实现的。

2.3. 运动学连接：用约束建模关节

在剪纸结构中，瓷砖之间的连接对其运动行为至关重要。在此基础上，我们采用并扩展了 [15] 中引入的约束表示框架。

从 2D 到 3D 约束表示的扩展。在先前的二维工作中 [15]，每个约束表示为一个 4 元组 $C_k = (i, p, j, q)$ ，这要求磁贴 i 的顶点 p 与磁贴 j 的顶点 q 重合。此约束在二维空间中有效地创建了一个球形关节，使得

$$v_{i,p} = v_{j,q}. \quad (1)$$

将其扩展到三维自然需要额外的 z 坐标约束。然而，由于我们的瓷砖是具有不同顶面和底面的三维刚体，我们必须指定哪个面上包含连接点。因此我们将约束表示扩展为五元组 $C_k = (i, p, j, q, t)$ ，其中 t 是一个面标识符： $t = 1$ 用于底面连接， $t = 2$ 用于顶面连接。为了保持向后兼容性，如果省略了 t （四元组格式），我们默认为底面连接。

关节类型及其实现。通过在 PyBullet 中策略性地组合不同的关节，我们可以实现不同类型的运动学连接，具有不同自由度。每种连接类型对应于特定的顶点重合约束模式（参见图 5）：

- **球形关节**：基本连接类型，通过使用单个点对点约束实现，强制每个瓦片的一个顶点重合（图 5，顶部）。这创建了一个球窝关节，允许围绕枢轴点的三个旋转自由度。
- **铰链关节**：使用两个球形关节构造的另一种连接类型，限制旋转为单一轴（图 5，中间）。
- **固定关节**：使用 PyBullet 的原生 JOINT_FIXED 约束类型实现的另一种连接方式（图 5，底部）。这种刚性连接完全消除了物体之间的所有相对自由度，防止任何相对运动。固定关节特别适用于创建结构稳定性，并在交互式模拟过程中暂时固定特定瓷砖。

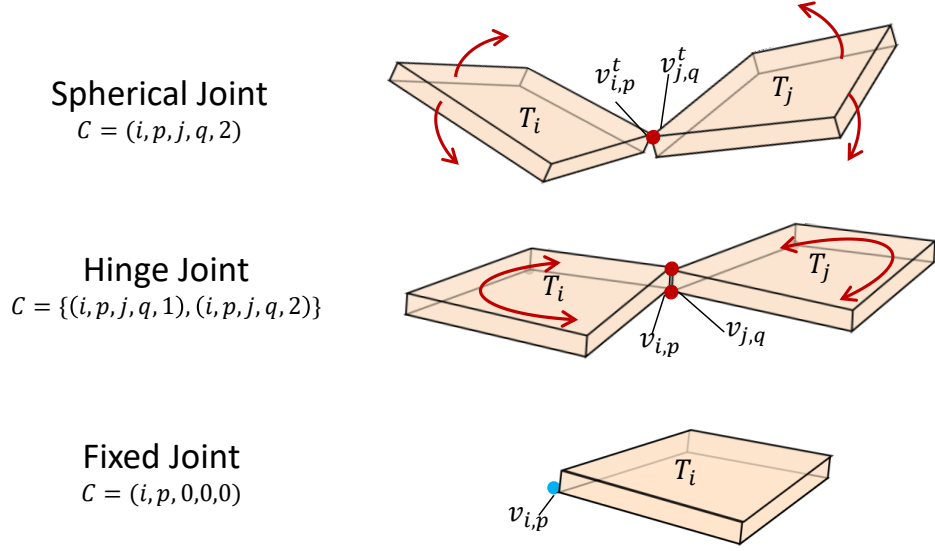


图 5: 三个不同类型的 PyKirigami 瓷砖连接示例。(顶部) 球形接头应用于 T_i 和 T_j 瓷砖, 使得旋转自由度等于 3。(中部) 铰链接头使得旋转自由度等于 1。(底部) 固定接头应用于 T_i 和世界坐标系, 使得物体完全固定。箭头表示旋转自由度。

2.4. 执行和动态的力模型

在构建了剪纸瓷砖及其连接后, 我们实现了一个基于物理的部署模拟。剪纸结构的动力行为受各种可配置力模型的控制, 包括用于基本径向展开的简单扩张力和更高级的目标导向驱动。

质心展开力. 对于剪纸结构的基底径向展开, PyKirigami 提供了一种自动展开模式, 该模式对每个瓦片的质心施加力, 使其从结构的全局中心向外扩散。当未指定精确的目标位置时, 此方法特别有用, 可作为后备或简化的驱动方法。

基于目标部署力量. 虽然可以通过上述描述的质心力实现简单的径向扩张, 但更复杂的部署则需要一种更为复杂的方法。我们的模拟器实现了基于顶点的目标模型, 该模型提供了对部署过程的精确控制。在此模型中, 每个磁贴的每个顶点都被分配了一个目标位置, 并施加力以引导这些顶点朝

向这些目标。这种方法允许实现比仅基于中心力或全局扩张方法更为复杂和受控的形状变换。

部署过程通过算法 2 实现，该算法计算并应用适当的力和扭矩以达到所需的配置：

Algorithm 2: 基于顶点的目标力应用

- 1: **输入:** 身体 ID 和局部坐标来自算法 1，目标顶点位置 $\{\tilde{v}_{i,j}\}$ ，弹簧刚度 k_s 和阻尼系数 μ
 - 2: **for** each body representing tile $\mathcal{T}_i$ **do**
 - 3: 从 Bullet 引擎检索当前位置和方向。
 - 4: 将局部顶点坐标转换为世界坐标。
 - 5: 初始化合力 $\mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ 和合扭矩 $\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{0}$ 。
 - 6: **for** each vertex j in tile i **do**
 - 7: 计算顶点力 $\mathbf{f}_{i,j} = k_s(\tilde{v}_{i,j} - v_{i,j})$ 。
 - 8: 添加到总力: $\mathbf{F}_i += \mathbf{f}_{i,j}$
 - 9: 计算力臂 $\mathbf{r}_{i,j} = v_{i,j} - \mathbf{c}_i$ 。
 - 10: 添加到总力矩: $\boldsymbol{\tau}_i += \mathbf{r}_{i,j} \times \mathbf{f}_{i,j}$ 。
 - 11: **end for**
 - 12: 对瓷砖 $\mathcal{T}_i$ 应用净力 $\mathbf{F}_i - \mu \cdot \mathbf{v}_i$ 和扭矩 $\boldsymbol{\tau}_i$ 。
 - 13: **end for**
-

这种基于顶点的方法相较于更简单的力模型具有多个优势，包括精确的形状控制、自然的旋转行为以及能够跟随复杂的展开路径。

环境和稳定力量. 除了驱动力之外，PyKirigami 模型还关键性地模拟了环境效应和稳定机制，这些完全由用户配置以模拟各种物理场景：

- **重力加载:** 重力矢量的大小和方向可以指定，以在各种负载条件下建模部署。
- **数值阻尼:** 为了增强稳定性并模拟能量耗散，该模型包括两种可配置的阻尼机制。首先，对每个刚体应用可调线性和角阻尼系数以消散系

统范围内的动能,并确保稳定收敛到准静态平衡。其次,在驱动力中包含一个阻尼因子(如算法 2 所示),以促进平滑且稳定的展开动力学。

- **接触建模:** 模拟器支持与外部表面的交互,例如可配置的地平面,并模拟由此产生的碰撞和摩擦力。

2.5. 交互控制与仿真状态管理

PyKirigami 提供了一整套交互控件,能够在展开过程中实时操控和分析 kirigami 结构。该模拟器支持以下关键功能:

动态边界条件指定. 工程分析的一个关键特性是能够动态地应用和修改边界条件。在 PyKirigami 中,用户可以交互式地定义任何瓦片上的固定约束,将其锚定到世界坐标系并限制其六个自由度。这些固定的瓦片以蓝色突出显示,作为刚性连接点。可以在仿真过程中切换此约束的开闭状态,恢复瓦片的移动能力。这一功能对于以下方面至关重要:

- 研究不同支撑配置对部署动力学和稳定性的影响。
- 定义运动约束以引导结构沿复杂展开路径移动。
- 通过对关键组件进行战略性固定,在部分部署的配置上执行虚拟稳定性测试。

状态捕获与中期仿真分析. 模拟可以在任意时刻暂停,以冻结当前配置下的切纸结构。这允许在不终止分析的情况下详细检查中间展开状态。捕获状态下顶点的坐标可以导出到文件中,从而实现多种下游分析流程:

- 在特定部署里程碑上的几何属性(例如,距离、角度、曲率)的定量分析。
- 多阶段或路径控制部署算法中使用的中间目标几何形状的生成。
- 在外部计算机辅助设计(CAD)或分析软件中特定配置的可视化和渲染。

交互控制总结. 上述功能的键盘和鼠标输入, 以及直接相机控制和手动操作, 在表 1 中进行了汇总。

表 1: PyKirigami 模拟器的交互控制方案。

Control Input	Functionality
Left-click + drag	Apply external, damped forces to tiles for manual guidance and actuation during deployment.
Right-click	Toggle fixed-world constraints on a selected tile.
Space bar	Toggle pause/resume the physics simulation.
R	Reset the simulation to its initial configuration.
S	Export the current vertex coordinates of the structure to a data file.
C	Capture snapshot of the current view as .png
Q	Quit the simulation application.
Scroll / Ctrl+drag	Zoom, rotate, and pan the camera for detailed visual inspection.

这些交互功能将 PyKirigami 从一个简单的前向模拟器提升为用于假设检验、设计探索以及对 kirigami 系统进行更深层次机械洞察的强大工具。

3. 结果

为了展示 PyKirigami 的多功能性和有效性, 我们提供了一组经过精选的例子, 并按部署维度进行了分组。这些案例展示了模拟器的自动化部署机制、环境控制和交互功能是如何应用于解决二维和三维切纸系统中的不同挑战的。

二维到二维部署和交互变形. 平面剪纸系统通常涉及平面扩展或在多个稳定状态之间的复杂形状变形。我们通过两个不同的示例展示了 PyKirigami 在这类场景中的功能。

首先, 我们考虑从 [15] 展开的 12 重 Stampfli 准晶剪纸结构的二维展开, 如图 6 所示。这种情况突出了使用质心扩展力进行简单径向展开的应用。更重要的是, 它展示了环境力和稳定力的基本作用。通过启用地面平

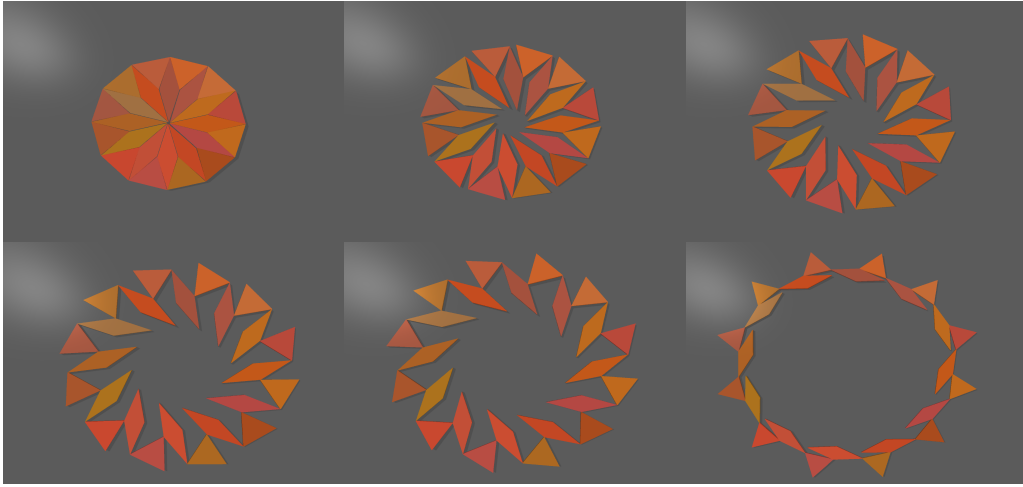


图 6: 通过 PyKirigami 实现的具有自动径向扩展并由环境力稳定化的 12 重 Stampfli 拟晶 kirigami 结构的模拟部署。

面（接触建模）和一个向下的重力矢量（重力加载），部署被限制在 XY 平面上，有效模拟了在物理表面上的展开，并防止这种柔性结构会发生面外屈曲。

其次，我们展示了一个完全交互的工作流程，使用一个紧凑可重新配置的扇形剪纸模型，该模型具有多个闭合和紧凑收缩状态（参见图 7）。这个示例超越了自动化部署，突显了 PyKirigami 在用户驱动分析方面的强大功能。用户利用：

- 直接手动操作（左键点击+拖动）以施加局部力，探索能量景观以引导结构在不同构型之间转换。
- 动态边界条件指定（右键单击）以交互方式固定和释放瓷砖。这用于创建临时锚点、测试中间状态的稳定性或隔离结构的部分进行详细分析。

这种亲自动手的方法，在第 2.5 节中详细描述，将模拟器转变为一个快速假设测试和获得机械洞察力的平台。

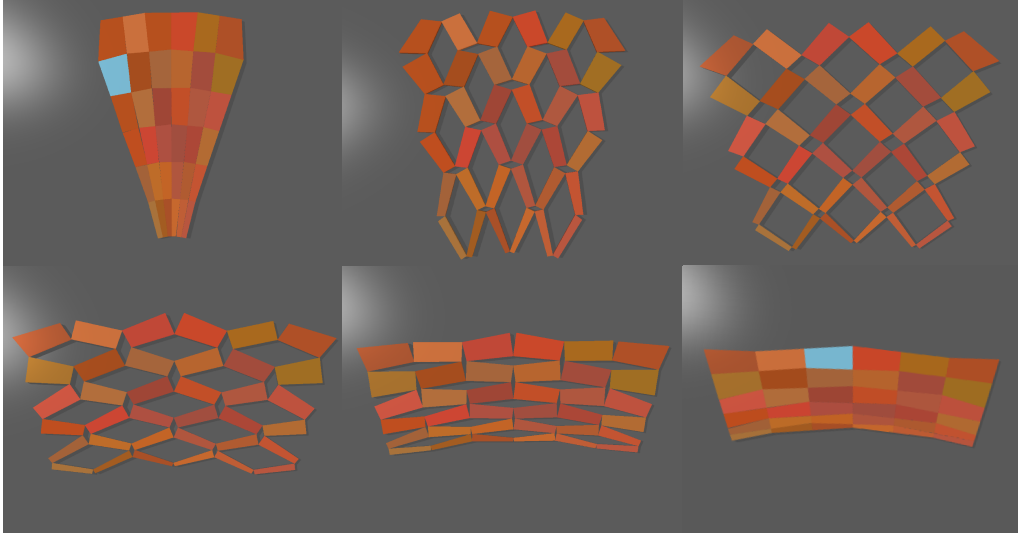


图 7: 由 PyKirigami 生成并具有交互形状变形的紧凑可重构扇形剪纸模型的模拟部署。这里，通过瓷砖固定（高亮显示为蓝色）实现了动态边界条件控制。

3D 布局与体积变换. 从平面片材到 3D 表面，或在不同的 3D 配置之间的转换，在 kirigami 模拟中代表了一个重大挑战。我们的下一个示例展示了 PyKirigami 如何处理这些复杂的非平面动力学。

图 8 所示的部分球体 kirigami 模型的 2D 到 3D 展开说明了基于目标的部署力（算法 2）的必要性。简单的扩展或手动交互不足以控制这种转变所需的复杂耦合弯曲和拉伸变形。基于顶点的目标模型提供了精确的控制，以引导结构通过其平面外路径，并确保稳定收敛到期望的球形几何形状。这种情况还强调了参数调优的重要性，在此过程中，驱动弹簧刚度 (k_s) 和阻尼 (μ) 被校准以平衡部署速度与稳定性。

最后，我们展示了一个使用紧凑可重构圆柱切纸结构的 3D 到 3D 部署，如图 9 所示。这突出了基于目标的部署力在引导三维复杂非径向路径方面的稳健性。将结构从紧凑折叠状态转换为其完全展开形式需要定义不仅最终形状，而且无碰撞体积变换的目标。这证明了该模型模拟可展空间结构或可重构机器人等先进系统的适用性。

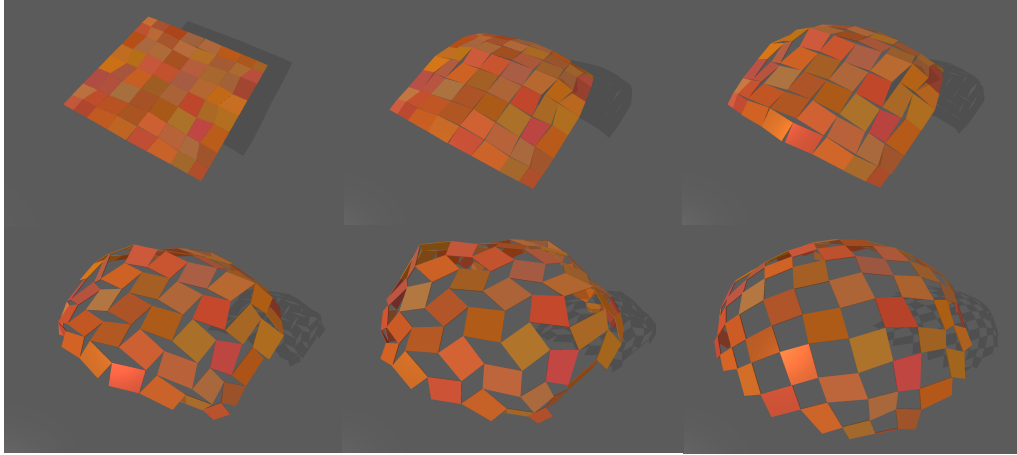


图 8: 通过 PyKirigami 实现的、由目标驱动力算法驱动的部分球体剪纸模型的二维到三维展开模拟。

4. 讨论

在这项工作中，我们开发了 PyKirigami，一个用于剪纸结构部署模拟的有效且开源计算工具。具体来说，我们展示了我们的 PyKirigami 模拟器处理不同 2D 和 3D 剪纸结构的能力，包括不同的定制设置，如瓷砖几何形状、瓷砖连接和其他部署参数。总体而言，我们的仿真工具可以显著简化剪纸结构的计算建模过程，从而为可变形超材料的设计开辟了一条新途径。

虽然 PyKirigami 为刚体动力学提供了一个强大的框架，但我们承认它目前的局限性。该模型假设瓷砖是刚性的，并且不捕捉材料弹性、塑性或断裂。高保真的应力/应变分析仍然需要 FEA 方法。此外，当前的实现专注于预定义的剪纸图案；实时切割或拓扑变化是未来工作的方向。因此，我们的模拟器最好定位为快速原型设计、运动学分析以及探索复杂剪纸组件全局部署动态的工具。

利益冲突声明

作者声明无利益冲突。

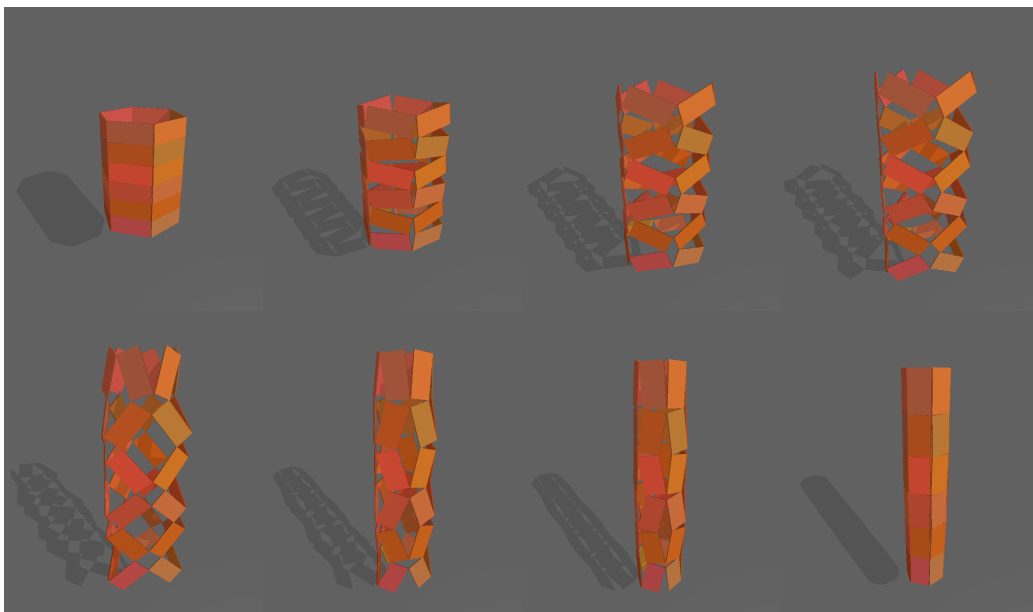


图 9: 通过 PyKirigami 实现的圆柱剪纸模型的模拟 3D 到 3D 展开和重构，展示了体积形状控制。

数据可用性

代码和数据可以在 GitHub 上的 <https://github.com/andy-qhjiang/PyKirigami> 获取。

References

- [1] E. Barchiesi, M. Spagnuolo, and L. Placidi, “Mechanical metamaterials: a state of the art,” *Math. Mech. Solids*, vol. 24, no. 1, pp. 212–234, 2019.
- [2] Z. Zhai, L. Wu, and H. Jiang, “Mechanical metamaterials based on origami and kirigami,” *Appl. Phys. Rev.*, vol. 8, no. 4, 2021.
- [3] X. Li, W. Peng, W. Wu, J. Xiong, and Y. Lu, “Auxetic mechanical metamaterials: from soft to stiff,” *Int. J. Extreme Manuf.*, vol. 5, no. 4, p. 042003, 2023.

- [4] G. P. T. Choi, “Computational design of art-inspired metamaterials,” *Nat. Comput. Sci.*, vol. 4, no. 8, pp. 549–552, 2024.
- [5] L. Jin and S. Yang, “Engineering kirigami frameworks toward real-world applications,” *Adv. Mater.*, vol. 36, no. 9, p. 2308560, 2024.
- [6] S. Jiang, X. Liu, J. Liu, D. Ye, Y. Duan, K. Li, Z. Yin, and Y. Huang, “Flexible metamaterial electronics,” *Adv. Mater.*, vol. 34, no. 52, p. 2200070, 2022.
- [7] Z. Song, X. Wang, C. Lv, Y. An, M. Liang, T. Ma, D. He, Y.-J. Zheng, S.-Q. Huang, H. Yu, *et al.*, “Kirigami-based stretchable lithium-ion batteries,” *Sci. Rep.*, vol. 5, no. 1, p. 10988, 2015.
- [8] Y. Yang, K. Vella, and D. P. Holmes, “Grasping with kirigami shells,” *Sci. Robot.*, vol. 6, no. 54, p. eabd6426, 2021.
- [9] J. N. Grima and K. E. Evans, “Auxetic behavior from rotating triangles,” *J. Mater. Sci.*, vol. 41, no. 10, pp. 3193–3196, 2006.
- [10] J. N. Grima and K. E. Evans, “Auxetic behavior from rotating squares,” *J. Mater. Sci. Lett.*, vol. 19, pp. 1563–1565, 2000.
- [11] D. Attard and J. N. Grima, “Auxetic behaviour from rotating rhombi,” *Phys. Status Solidi B*, vol. 245, no. 11, pp. 2395–2404, 2008.
- [12] A. Rafsanjani and D. Pasini, “Bistable auxetic mechanical metamaterials inspired by ancient geometric motifs,” *Extreme Mech. Lett.*, vol. 9, pp. 291–296, 2016.
- [13] M. Stavric and A. Wiltsche, “Geometrical elaboration of auxetic structures,” *Nexus Netw. J.*, vol. 21, pp. 79–90, 2019.

- [14] L. Liu, G. P. T. Choi, and L. Mahadevan, “Wallpaper group kirigami,” *Proc. R. Soc. A*, vol. 477, no. 2252, p. 20210161, 2021.
- [15] L. Liu, G. P. T. Choi, and L. Mahadevan, “Quasicrystal kirigami,” *Phys. Rev. Research*, vol. 4, no. 3, p. 033114, 2022.
- [16] G. P. T. Choi, L. H. Dudte, and L. Mahadevan, “Programming shape using kirigami tessellations,” *Nat. Mater.*, vol. 18, no. 9, pp. 999–1004, 2019.
- [17] S. Chen, G. P. T. Choi, and L. Mahadevan, “Deterministic and stochastic control of kirigami topology,” *Proc. Natl. Acad. Sci.*, vol. 117, no. 9, pp. 4511–4517, 2020.
- [18] G. P. T. Choi, L. H. Dudte, and L. Mahadevan, “Compact reconfigurable kirigami,” *Phys. Rev. Research*, vol. 3, no. 4, p. 043030, 2021.
- [19] X. Dang, F. Feng, H. Duan, and J. Wang, “Theorem for the design of deployable kirigami tessellations with different topologies,” *Phys. Rev. E*, vol. 104, no. 5, p. 055006, 2021.
- [20] Y. Zheng, I. Niloy, P. Celli, I. Tobasco, and P. Plucinsky, “Continuum field theory for the deformations of planar kirigami,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 128, no. 20, p. 208003, 2022.
- [21] L. Wang, Y. Chang, S. Wu, R. R. Zhao, and W. Chen, “Physics-aware differentiable design of magnetically actuated kirigami for shape morphing,” *Nat. Commun.*, vol. 14, no. 1, p. 8516, 2023.
- [22] L. H. Dudte, G. P. T. Choi, K. P. Becker, and L. Mahadevan, “An additive framework for kirigami design,” *Nat. Comput. Sci.*, vol. 3, no. 5, pp. 443–454, 2023.

- [23] C. Qiao, S. Chen, Y. Chen, Z. Zhou, W. Jiang, Q. Wang, X. Tian, and D. Pasini, “Inverse design of kirigami through shape programming of rotating units,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 134, no. 17, p. 176103, 2025.
- [24] M. Konaković, K. Crane, B. Deng, S. Bouaziz, D. Piker, and M. Pauly, “Beyond developable: computational design and fabrication with auxetic materials,” *ACM Trans. Graph.*, vol. 35, no. 4, pp. 1–11, 2016.
- [25] M. Konaković-Luković, J. Panetta, K. Crane, and M. Pauly, “Rapid deployment of curved surfaces via programmable auxetics,” *ACM Trans. Graph.*, vol. 37, no. 4, pp. 1–13, 2018.
- [26] T. Chen, J. Panetta, M. Schnaubelt, and M. Pauly, “Bistable auxetic surface structures,” *ACM Trans. Graph.*, vol. 40, no. 4, pp. 1–9, 2021.
- [27] X. Dang, F. Feng, H. Duan, and J. Wang, “Theorem on the compatibility of spherical kirigami tessellations,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 128, no. 3, p. 035501, 2022.
- [28] X. Dang, S. Chen, A. E. Acha, L. Wu, and D. Pasini, “Shape and topology morphing of closed surfaces integrating origami and kirigami,” *Sci. Adv.*, vol. 11, no. 18, p. eads5659, 2025.
- [29] L. Jin, A. E. Forte, B. Deng, A. Rafsanjani, and K. Bertoldi, “Kirigami-inspired inflatables with programmable shapes,” *Adv. Mater.*, vol. 32, no. 33, p. 2001863, 2020.
- [30] N. An, A. G. Domel, J. Zhou, A. Rafsanjani, and K. Bertoldi, “Programmable hierarchical kirigami,” *Adv. Funct. Mater.*, vol. 30, no. 6, p. 1906711, 2020.
- [31] R. Zhu, H. Yasuda, G. Huang, and J. Yang, “Kirigami-based elastic metamaterials with anisotropic mass density for subwavelength flexural wave control,” *Sci. Rep.*, vol. 8, no. 1, p. 483, 2018.

- [32] N. A. Alderete, L. Medina, L. Lamberti, C. Sciammarella, and H. D. Espinosa, “Programmable 3D structures via kirigami engineering and controlled stretching,” *Extreme Mech. Lett.*, vol. 43, p. 101146, 2021.
- [33] X. Ying, D. Fernando, and M. A. Dias, “Inverse design of programmable shape-morphing kirigami structures,” *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 286, p. 109840, 2025.